MARIA E LE BOLLETTE TELEFONICHE

Prima parte

Maria è una studentessa di 15 anni che ha un problema da risolvere. Dopo l'ultima bolletta telefonica, i suoi genitori le hanno fatto notare che le sue chiamate pesano per il 70% dell'ammontare della spesa. Questo fatto si verifica ormai da mesi e le propongono di discutere insieme il problema.

Vogliamo seguire insieme le vicende di Maria e aiutarla nell'affrontare la situazione?

……..

I genitori di Maria le forniscono i fogli relativi al traffico effettuato. Le chiedono di evidenziare le sue telefonate, di calcolarne lei stessa il costo totale e di pensare seriamente a come correggere la situazione. Dopo concorderanno insieme un limite massimo di spesa ragionevole che lei si impegnerà a non superare con penali e premi da stabilire.

Cosa le consigliamo di fare?

(La classe: ……..)

Può bastare effettuare la somma dei costi delle singole telefonate?

(La classe: …….)

Dopo aver calcolato la somma totale cosa dovrà fare Maria?

(La classe: …….)

Dovendo diminuire la spesa potremmo consigliare a Maria di costruire dei grafici che mettano in evidenza quali telefonate incidono maggiomente sulla spesa totale. Potremmo immaginare di avere lo stesso problema di Maria e di lavorare sui dati delle nostre bollette telefoniche . (nota: in prospettiva della lezione, si è chiesto agli studenti di portare da casa gli elenchi del traffico telefonico relativi a una delle ultime bollette).

(La classe: ……)

Quali sono le voci presenti sui tabulati del traffico effettuato?

(La classe: ……)

(Telefonate urbane, interurbane, internazionali, a cellulari, connessioni a Internet, fasce orarie intera/ridotta)

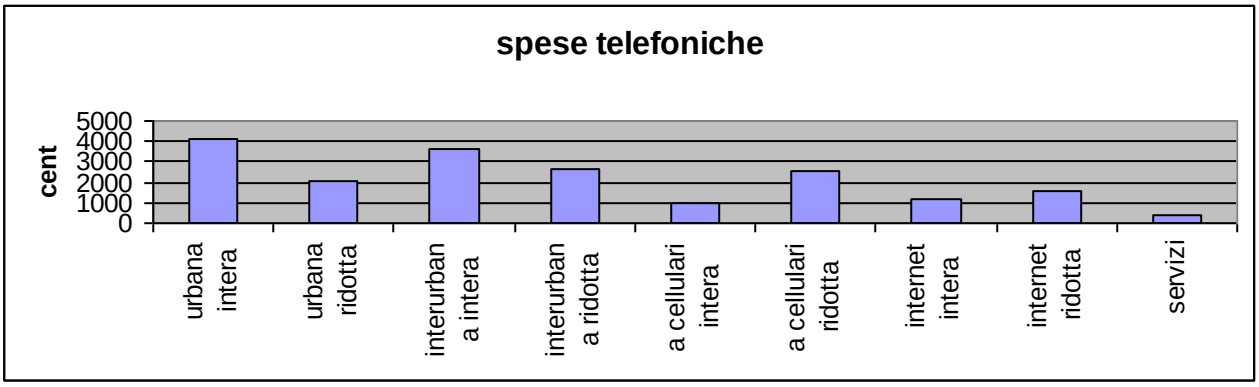
Utilizzando il foglio elettronico potremmo costruire gli istogrammi che riteniamo più idonei a rappresentare il nostro traffico telefonico e ad analizzarne le caratteristiche. Quali realizzereste?

(La classe: ……) (Costi totali di telefonate urbane, interurbane, nazionali , internazionali , verso cellulari, collegamenti a Internet con distinzione per fasce).
Proviamo a realizzare questi grafici?
Nota: il lavoro è portato avanti dalla classe in piccoli gruppi che lavorano al computer. Al termine dovranno fare osservazioni riguardo alle voci che pesano di più sulla spesa totale .
Durante il lavoro si guideranno i vari gruppi a fare scelte ragionate e motivate che dovranno riportare sulla scheda di lavoro.

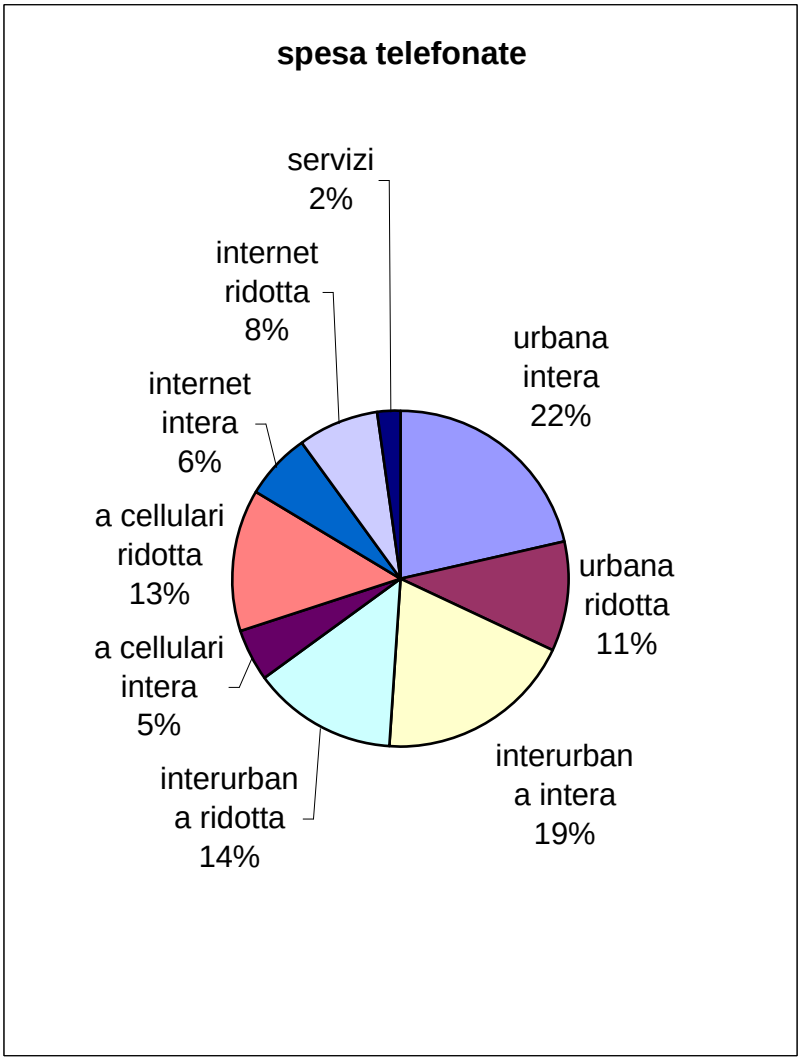
Un esempio possibile….

tipo di telefonata	spesa cent.	percentuali
urbana intera	4106	21,45918
urbana ridotta	2014	10,52577
interurbana intera	3650	19,07599
interurbana ridotta	2643	13,81311
a cellulari intera	1004	5,247204
a cellulari ridotta	2576	13,46295
Internet intera	1205	6,29769
Internet ridotta	1530	7,996237
Servizi	406	2,121877

spesa totale	19134	cent.
	191,34	euro



con la stessa tabella è possibile realizzare il seguente grafico a torta



Che tipo di informazioni si traggono da queste due diverse rappresentazioni degli stessi dati? Quali le differenze?
(La classe: ……)
(nel nostro caso e in generale, l'istogramma mette in evidenza l'ammontare delle diverse voci e permette un confronto tra esse. L'areogramma invece mette in evidenza il peso delle varie voci in percentuale rispetto al totale, non permettendo però la lettura dei singoli valori di spesa.)

Nota: per maggiori dettagli vedere il file di excel bollette e istogrammi.

MARIA E LE BOLLETTE TELEFONICHE

Seconda parte

La necessità di Maria è quella di abbassare la spesa delle varie voci. Se osserviamo l'istogramma, questo corrisponde ad abbassare le quote delle diverse colonne. L'altezza della colonna è legata al numero di telefonate e al costo di ciascuna di esse.
Quali sono le voci che pesano nel costo di ogni telefonata?
(la classe: ……..)
Le voci sono lo scatto alla risposta, la tariffa al minuto, la durata della telefonata.

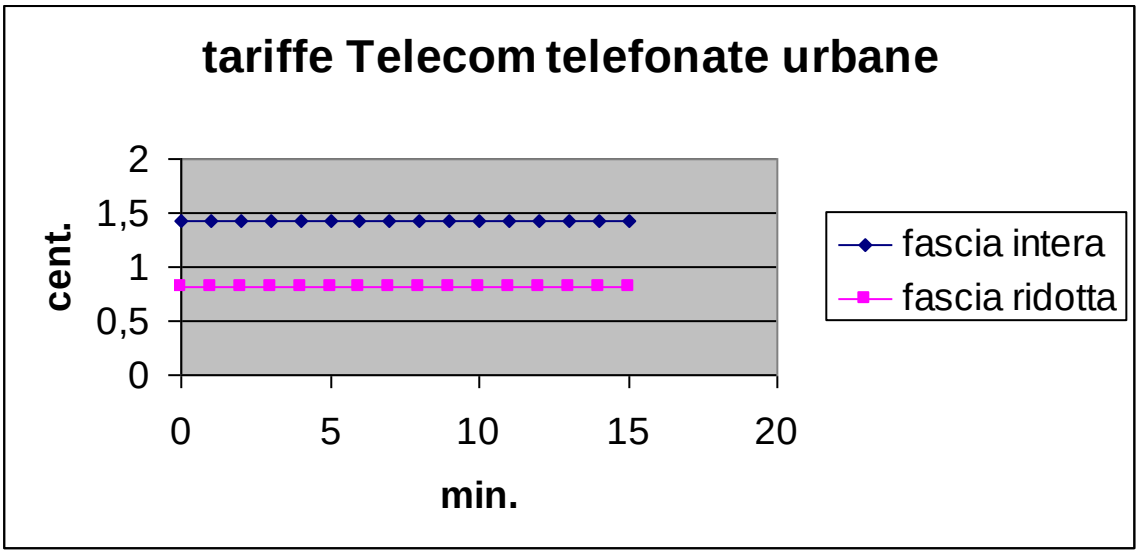
Come potremmo aiutare Maria rappresentare come varia il costo di una sua telefonata in **funzione** di queste **variabili**?
…. Ogni gruppo realizza due grafici: **tariffa al minuto** e **costo telefonata** in **funzione del tempo,** ponendo a confronto sullo stesso grafico le tariffe di fascia intera e fascia ridotta di una stessa compagnia telefonica.

…. Spazio aperto alla discussione su: "come si fa". In questa fase operativa, è molto importante la guida dell'insegnante che deve fornire le conoscenze necessarie alla costruzione di questo tipo di grafici, aiutando nel contempo gli studenti ad elaborare ragionamenti propri e giustificazioni ai vari passaggi operativi.

Tempo min.	tariffa al minuto urb. Fascia intera	tariffa al minuto urb. Fascia ridotta
0	1,43	0,82
1	1,43	0,82
2	1,43	0,82
3	1,43	0,82
4	1,43	0,82
5	1,43	0,82
6	1,43	0,82
7	1,43	0,82
8	1,43	0,82
9	1,43	0,82
10	1,43	0,82
11	1,43	0,82
12	1,43	0,82
13	1,43	0,82
14	1,43	0,82
15	1,43	0,82

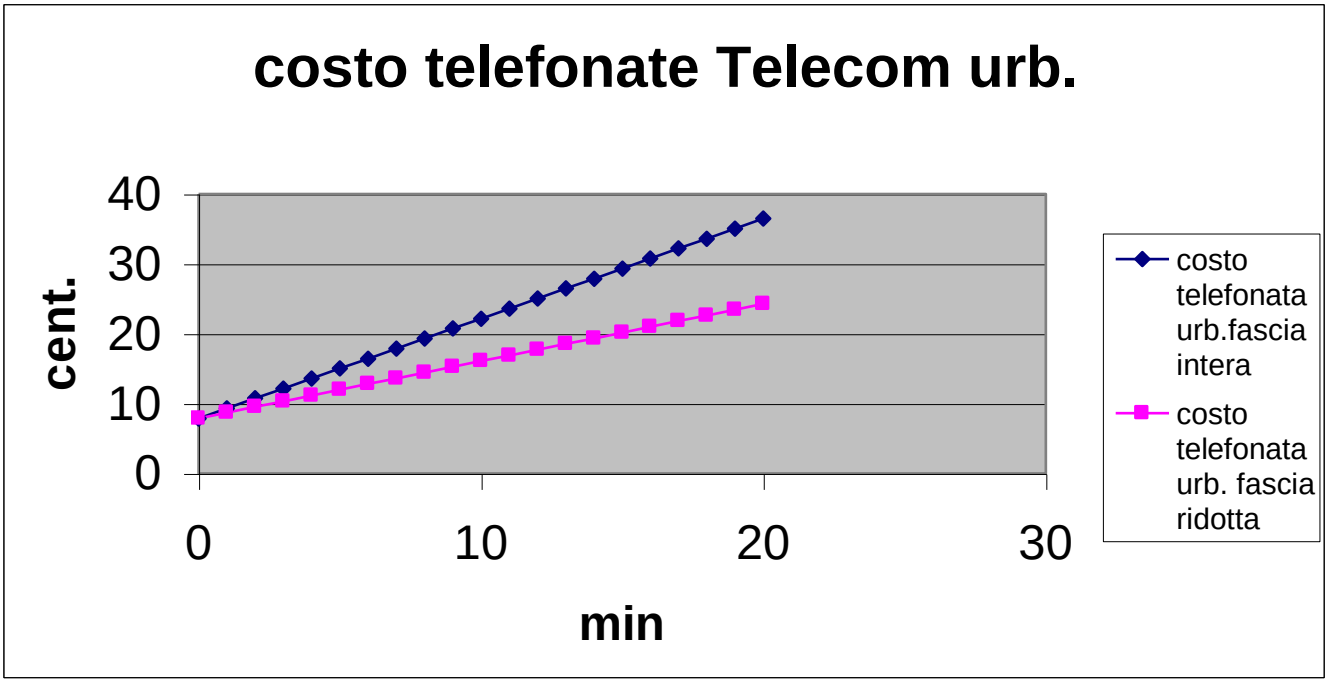
Esempi di grafici: Tariffe Telecom Urbane.

(vedere anche file bollette reali)



scatto alla risposta= 7,87cent.
tariffa al min. fascia int.= 1,43cent.
tariffa al min. fascia rid.= 0,82cent.

tempo min	costo telefonata urb.fascia intera	costo telefonata urb. fascia ridotta
0	7,87	7,87
1	9,3	8,69
2	10,73	9,51
3	12,16	10,33
4	13,59	11,15
5	15,02	11,97
6	16,45	12,79
7	17,88	13,61
8	19,31	14,43
9	20,74	15,25
10	22,17	16,07
11	23,6	16,89
12	25,03	17,71
13	26,46	18,53
14	27,89	19,35
15	29,32	20,17
16	30,75	20,99
17	32,18	21,81
18	33,61	22,63
19	35,04	23,45
20	36,47	24,27



Per maggiori dettagli vedere foglio 1 di "tariffe e telefonate 1.xls"

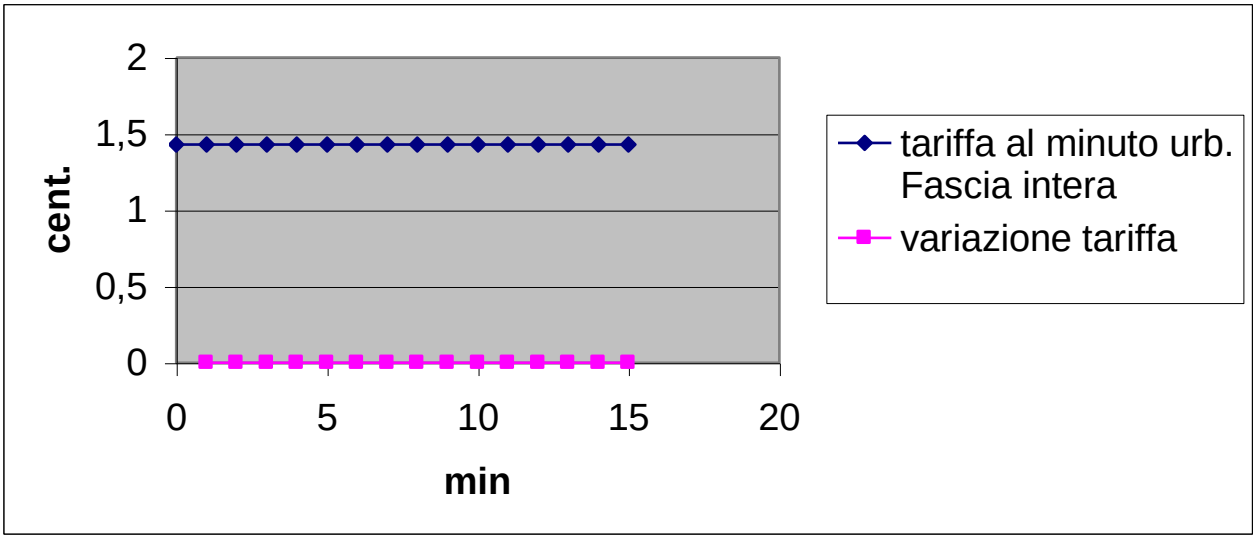
Analisi ragionata dei grafici.
Cosa rappresentano questi grafici? Quali le differenze tra questi grafici e gli istogrammi o i diagrammi a torta?
Quali informazioni possiamo estrapolare da questi grafici?
(La classe: …….) L'insegnante guida la classe a costruire i concetti di funzione, di variabile indipendente e di variabile dipendente.
Per es. Tariffa min. = funzione (tempo)
Tariffa min. urb. Int.=1.43 (esempi di funzioni costanti)
Tariffa min. urb. Rid.= 0,82

Costo tel.= funzione (tempo)
Costo tel.urb.int. =7.87+ 1.43*tempo (esempi di funzioni lineari)
Costo tel.urb.rid. =7.87 + 0.82*tempo
Il valore della grandezza costo telefonata è messa in relazione alla durata della chiamata secondo la funzione f(t)=7.87+1.43*t (caso tariffa intera)
Al variare di **t** (**variabile indipendente**), il **costo telefonata** (**variabile dipendente**) assume un valore definito, ottenuto sostituendo in f(t) quel particolare valore di t .
Dal grafico Costo telefonate emerge che il costo all'istante iniziale è pari 7.87 sia nel caso di tel. fascia intera che tel. fascia ridotta. Dai minuti successivi, però il costo delle telefonate nei due casi cresce in modo diverso. Si chiede

agli studenti di spiegare il perché e come è possibile giustificarlo dalle tabelle, dalle formule, con le quali abbiamo costruito le tabelle, e dai grafici.
(La classe: …….)
Per costruire/rinforzare il concetto di **variazione al minuto => pendenza del grafico** si chiede ai gruppi di lavoro di costruire dei grafici dove venga messa in evidenza la variazione dei valori assunti dalla variabile dipendente al passare del tempo.
Nota: In questa prima fase, la colonna variazioni si costruisce con la formula: valore attuale – valore precedente , precisando che si sta calcolando la variazione al minuto. Non ha senso, inoltre, il calcolo della variazione all'istante t = 0. (per maggiori dettagli vedere il foglio 2 di "tariffe e telefonate 1.xls". Qui di seguito copie di tabelle e grafici)

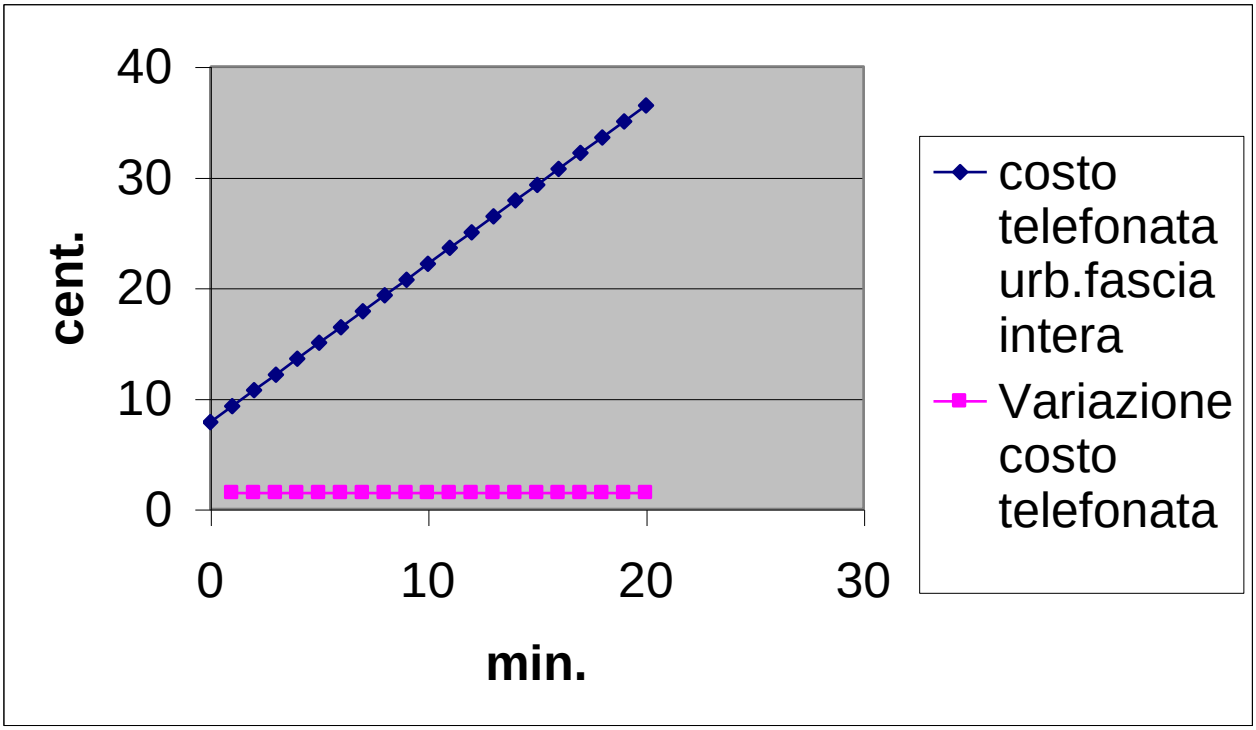
caso di funzione costante: la variazione dei valori assunti dalla variabile dipendente: tariffa al minuto, al passare dei minuti di conversazione, è costante e nulla.

tempo min.	tariffa al minuto urb. Fascia intera	variazione tariffa
0	1,43	
1	1,43	0
2	1,43	0
3	1,43	0
4	1,43	0
5	1,43	0
6	1,43	0
7	1,43	0
8	1,43	0
9	1,43	0
10	1,43	0
11	1,43	0
12	1,43	0
13	1,43	0
14	1,43	0
15	1,43	0



tempo min	costo telefonata urb.fascia intera	Variazione al min costo telefonata
0	7,87	
1	9,3	1,43
2	10,73	1,43
3	12,16	1,43
4	13,59	1,43
5	15,02	1,43
6	16,45	1,43
7	17,88	1,43
8	19,31	1,43
9	20,74	1,43
10	22,17	1,43
11	23,6	1,43
12	25,03	1,43
13	26,46	1,43
14	27,89	1,43
15	29,32	1,43
16	30,75	1,43
17	32,18	1,43
18	33,61	1,43
19	35,04	1,43
20	36,47	1,43

scatto alla risposta= 7,87cent.
tariffa al min. fascia int.= 1,43cent.



È possibile anche aprire il file di Cabri II Plus (attenzione: non si apre con Cabri II) Bolletta telefonica

Esercizi:

1) costruire le tabelle e il grafico che permettano di confrontare il costo di una telefonata urbana telecom fascia ridotta e il costo di una telefonata fatta con altra compagnia con stessa tariffa al minuto ma scatto alla risposta di 4 cent. Annotare le considerazioni che emergono dall'analisi dei grafici.
2) Costruire le tabelle e il grafico che permettano di confrontare tariffe telecom urb. int. con quelle di altra compagnia con scatto alla risposta di 10cent. e tariffa al minuto di 1,2 cent. In quali casi risulta conveniente telefonare con la seconda compagnia? In quale caso è indifferente?
3) Considerare, nella tabella costi telefonata, due tempi t1 e t2 a piacere e calcolare la corrispondente variazione del costo della telefonata. Dividere la variazione per l'intervallo di tempo t2-t1. Quali risultato si ottiene. Si provi a scegliere un'altra coppia di valori t1 e t2 e rifare il calcolo. Quale significato dai ai risultati ottenuti?

La risoluzione di questi esercizi può essere assegnata per casa.
Durante la successiva ora di lezione in classe, si discuteranno i risultati.
L'esercizio 1) porta l'esempio di due relazioni lineari, rappresentate da grafici di rette aventi la stessa pendenza, quindi parallele. Per ogni t, la differenza tra i costi è pari alla differenza di costo dello scatto alla risposta.

f1(t)=7.87+1,43* t ; f2(t)=4.00+1,43*t

L'esercizio 2) porta l'esempio di due relazioni lineari, rappresentate da grafici di rette con pendenze diverse e valori di riferimento diversi a t=0. Sarà interessante chiedere alla classe di provare a riformulare le domande presenti nell'esercizio 2 in formalismo matematico adeguato. (risp. 10+1,2* t < 7,87+ 1,43*t e 10+1,2* t = 7,87+ 1,43*t ;)
(nota: dall'analisi/confronto delle tabelle e dei grafici è possibile proporre un metodo alternativo per la risoluzione grafica di equazioni di primo grado (domanda 2), e disequazioni (domanda 1).

L'esercizio 3) porta a chiarire il concetto di tasso di variazione .

In generale una relazione lineare è rappresentata da una funzione del tipo:

Y(x)= m*x+q

x è la variabile indipendente , **Y** la variabile dipendente, il **coefficiente m** rappresenta il tasso di crescita di Y al variare di x, **q** è il termine additivo che corrisponde al valore di Y quando x= 0.
Una relazione lineare è rappresentata graficamente da una **retta.** Ogni punto del grafico corrisponde alla coppia di valori (Y(x); x).
Il coefficiente m è detto pendenza o coefficiente angolare (infatti dipende dall'angolo di inclinazione che la retta forma con la direzione positiva dell'asse x), e il termine q è l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse Y.
Dati due punti sulla retta, (Y(x1);x1) e (Y(x2);x2) , la pendenza si calcola : m= (Y(x2)-Y(x1))/(x2-x1).

Può risultare interessante far verificare agli studenti che il grafico del costo di una telefonata in funzione del tempo si può costruire anche attraverso un algoritmo ricorsivo di calcolo :

tariffa.min=1,43 cent.
Δt= 1min.
Costo(t_o)= 7,87;
Δcosto= tariffa.min*Δt
costo(t_1)= costo(t_0)+ Δcosto
…….
Costo(ti)= costo(t_{i-1}) + Δcosto
……..

possiamo ricavare alcune osservazioni:
Δcosto= costo(t_i)- costo(t_{i-1}) =>
tariffa.min* (ti – t_{i-1}) = costo(t_i)- costo(t_{i-1}) =>
tariffa.min= (costo(t_i)- costo(t_{i-1}))/ (ti – t_{i-1})

tariffa.min è il coefficiente angolare della retta che rappresenta il grafico della funzione costo.telefonata(t). La variabile indipendente t è rappresentata sulla ascisse nell'unità di misura minuti, e il costo.telefonata(t) è rappresentato sull'asse delle ordinata nell'unità di misura cent.

MARIA E LE BOLLETTE TELEFONICHE

Parte terza

Dove abbiamo lasciato Maria? Quali sono le variabili che Maria deve controllare per diminuire la spesa telefonica: il numero di telefonate, la durata, la tariffa in atto.
Dall'elenco del traffico telefonico, Maria calcola il numero di telefonate fatte per ogni categoria presente nell'istogramma 1. Calcola il tempo totale delle sue telefonate e la durata media di ciascuna. E ottiene….. Considera ragionevole diminuire la durata media delle sue telefonate. Fa una ricerca in Internet per aggiornarsi sulle tariffe telefoniche delle diverse compagnie.
Confronta le tariffe per valutare quella più conveniente.
Seguendo l'esempio di Maria, facciamo la stessa ricerca di mercato, utilizzando i dati presenti sui nostri elenchi del traffico telefonico.
Al lavoro svolto in laboratorio di informatica, deve seguire la produzione di una relazione nella quale si motiva la scelta fatta dal gruppo sostenendola con una elaborazione quantitativa dei dati a disposizione.
L'insegnante deve guidare i vari gruppi nelle diverse fasi di questo lavoro per ottimizzare i tempi di produzione. (tempo 2 ore.)

Maria torna dai genitori con una proposta che a lei sembra ragionevole. Chiede di poter attivare un contratto con la compagnia….. , con le seguenti caratteristiche…… ,impegnandosi a non superare la spesa di 25euro al mese. I genitori accettano la proposta e come promesso definiscono pegni e premi.
I premi: un terzo del quadrato della somma risparmiata rispetto ai 25 euro mensili, verrà accumulata per farle un regalo scelto da lei stessa.

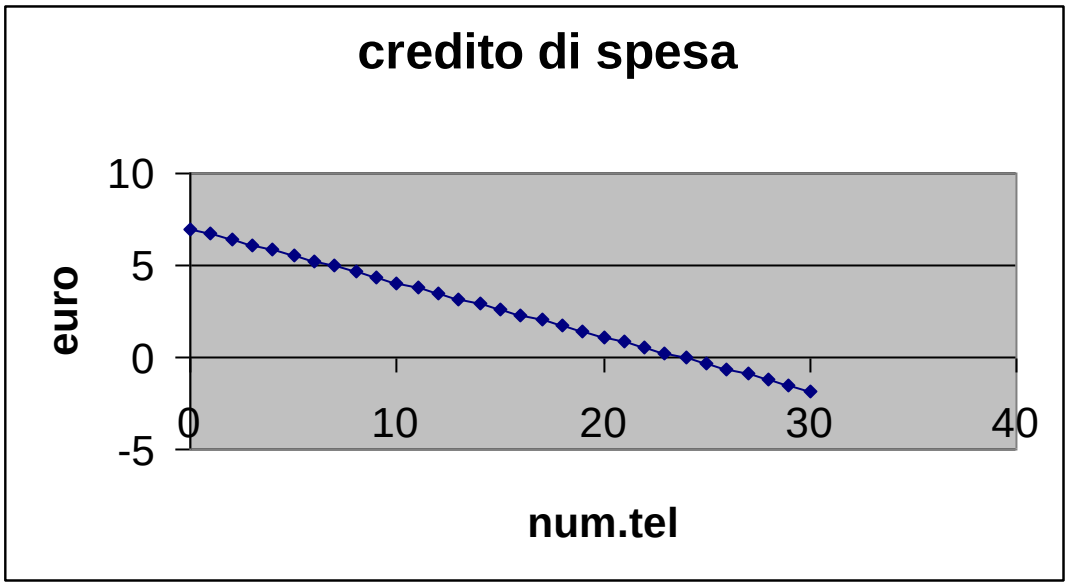
I pegni: l'orario di rientro a casa, per l'uscita del sabato sera, verrà anticipato, per tutto il mese successivo, di un tempo che sarà di 2min al superamento del primo euro della spesa pattuita e raddoppierà per ogni euro in più.
Maria accetta e sorride all'idea che i premi sono più consistenti che i pegni. Sarà davvero così?

Ogni gruppo definisca le percentuali di spesa per ogni tipo di telefonata e le rappresenti con un grafico a torta. Calcoli i valori di spesa associati e li rappresenti con un istogramma. Definendo il tempo medio di telefonata calcoli il costo di una telefonata per ogni categoria e il numero di telefonate.
Si potrebbe realizzare, con Excel, una applicazione che permetta di individuare il numero di telefonate che si possono effettuare per ogni categoria definendo: il massimale di spesa prevista, la tariffa, la durata media di una conversazione. (vedere file di excel numero telefonate)

tariffa	1,43cent
scatto alla risposta	7,87cent
durata telefonata	15min.
spesa disponibile	7euro
costo telefonata	0,2932euro

Num. telefonate	Spesa rimanente
0	7
1	6,7068
2	6,4136
3	6,1204
4	5,8272
5	5,534
6	5,2408
7	4,9476
8	4,6544
9	4,3612
10	4,068
11	3,7748
12	3,4816
13	3,1884
14	2,8952
15	2,602
16	2,3088
17	2,0156
18	1,7224
19	1,4292
20	1,136
21	0,8428
22	0,5496
23	0,2564
24	-0,0368

25	-0,33
26	-0,6232
27	-0,9164
28	-1,2096
29	-1,5028
30	-1,796



Quante telefonate può fare Maria affinché il credito non si trasformi in debito?
Verificare, cambiando tariffa o durata della conversazione, come cambia il grafico e il numero di telefonate effettuabili.
(nota: Ogni gruppo, a suo piacere, continuerà l'elaborazione con le tariffe del contratto scelto nella fase precedente.)
(Osservazione: Esempio di funzione lineare decrescente, esempio di risoluzione di equazione di primo grado)

MARIA E LE BOLLETTE TELEFONICHE

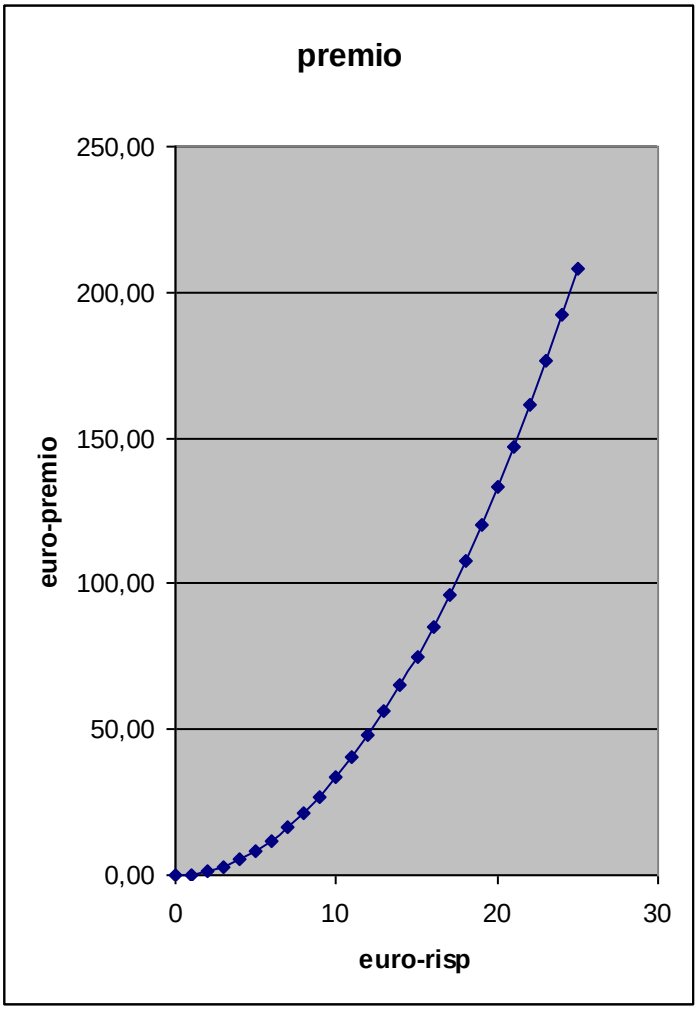
Parte quarta

Maria, dopo aver calcolato il numero medio di telefonate giornaliere per ogni categoria e la durata media delle stesse, comincia a pensare che sarebbe bello poter risparmiare ogni mese qualche euro per regalarsi il biglietto per il concerto della sua band preferita. Perciò, ormai "esperta", decide di fare qualche proiezione per capire fino a che punto sia interessante l'offerta premio dei suoi genitori.

Il premio è una somma di denaro pari a un terzo del quadrato della somma risparmiata rispetto ai 25 euro pattuiti.

Usiamo ancora il foglio elettronico realizziamo il grafico.

euro_risp	euro_premio
0	0,00
1	0,33
2	1,33
3	3,00
4	5,33
5	8,33
6	12,00
7	16,33
8	21,33
9	27,00
10	33,33
11	40,33
12	48,00
13	56,33
14	65,33
15	75,00
16	85,33
17	96,33
18	108,00
19	120,33
20	133,33
21	147,00
22	161,33
23	176,33
24	192,00
25	208,33

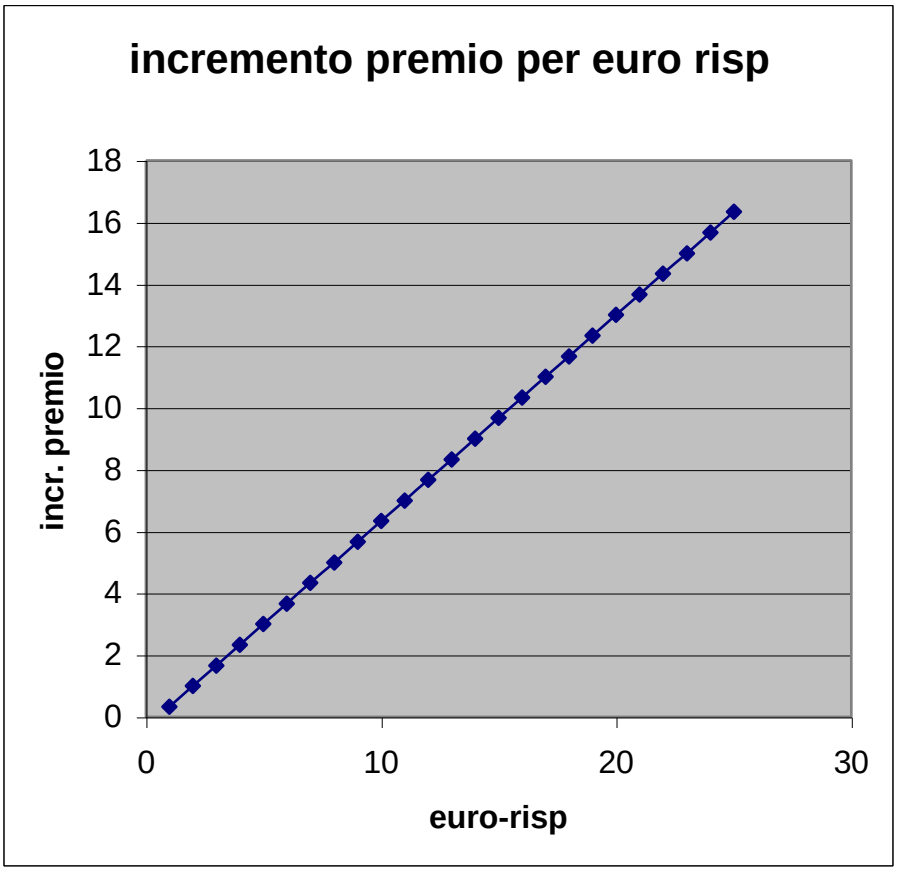


(Per maggiori dettagli vedere " premi_maria.xls ")

Quali considerazione può fare Maria, osservando questo grafico?
Di quanto aumenta il premio ad ogni euro risparmiato?
È ancora una funzione crescente? È lineare?
Qual è l'aumento del premio, di euro in euro?
Facciamo il grafico:
va notato che la colonna variazione del premio assume il primo valore rappresentativo solo dalla seconda riga in poi, cioè in corrispondenza del primo valore di euro_risp diverso da 0. Infatti , la formula ricorsiva di calcolo è (euro_premio attuale- euro_premio precedente)/Δeuro_risp.

euro_risp	euro_premio	Var.premio

0	0,00	
1	0,33	0,33
2	1,33	1,00
3	3,00	1,67
4	5,33	2,33
5	8,33	3,00
6	12,00	3,67
7	16,33	4,33
8	21,33	5,00
9	27,00	5,67
10	33,33	6,33
11	40,33	7,00
12	48,00	7,67
13	56,33	8,33
14	65,33	9,00
15	75,00	9,67
16	85,33	10,33
17	96,33	11,00
18	108,00	11,67
19	120,33	12,33
20	133,33	13,00
21	147,00	13,67
22	161,33	14,33
23	176,33	15,00
24	192,00	15,67
25	208,33	16,33



LA VARIAZIONE HA UN ANDAMENTO LINEARE CRESCENTE!!!
Verifichiamo calcolando i valori della variazione dell'incremento del premio:

euro_risp	euro_premio	Var.premio	Var. incr.pr.
0	0,00		
1	0,33	0,33	
2	1,33	1,00	0,67
3	3,00	1,67	0,67
4	5,33	2,33	0,67
5	8,33	3,00	0,67
6	12,00	3,67	0,67
7	16,33	4,33	0,67
8	21,33	5,00	0,67
9	27,00	5,67	0,67
10	33,33	6,33	0,67
11	40,33	7,00	0,67
12	48,00	7,67	0,67
13	56,33	8,33	0,67
14	65,33	9,00	0,67
15	75,00	9,67	0,67
16	85,33	10,33	0,67
17	96,33	11,00	0,67
18	108,00	11,67	0,67
19	120,33	12,33	0,67
20	133,33	13,00	0,67
21	147,00	13,67	0,67
22	161,33	14,33	0,67
23	176,33	15,00	0,67
24	192,00	15,67	0,67
25	208,33	16,33	0,67

La funzione variazione dell'incremento si comincia a calcolare solo al secondo passo dell'iterazione. Il suo valore si ottiene infatti con la seguente formula ricorsiva:

(var.incr.attuale-var.incr.precedente)/Δeuro-risp.

Dai vari grafici e dalla tabella soprastante, possiamo osservare che ogni euro in più risparmiato, produrrà un aumento del premio proporzionale al numero di euro risparmiati. Infatti, la variazione della variazione del premio (cioè il coefficiente angolare della retta del grafico "incremento premio", ovvero derivata seconda di y(x)= (x^2)/3), è una funzione costante e la funzione incremento premio può essere rappresentata dalla funzione

Incremento-premio (euro-risp) = 0,67*euro-risp

(Oss. Retta che passa per l'origine, Y(X)= m* X ; m=0,67 ; q = 0)

MARIA E LE BOLLETTE TELEFONICHE

Parte quinta

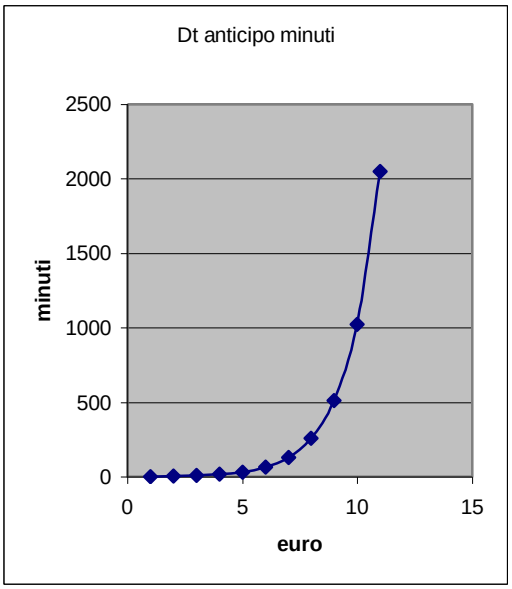
Maria sa che sarà difficile riuscire a risparmiare, teme anzi di superare il massimo di spesa. Decide perciò, di valutare con attenzione il peso dei pegni. I genitori hanno stabilito che l'orario di rientro a casa, per l'uscita del sabato sera, verrà anticipato, per tutto il mese successivo, di un tempo che sarà di 2min al superamento del primo euro della spesa pattuita e raddoppierà per ogni euro in più.
Maria vuol capire bene che cosa la aspetta se non riuscirà a rispettare l'impegno preso con i suoi genitori.

Anche noi siamo curiosi
Costruiamo la tabella e il grafico dei pegni. Cerchiamo di individuare la relazione che lega il superamento di spesa (variabile indipendente) con l'anticipo del rientro a casa (variabile dipendente)
La classe……
La relazione con la quale possiamo rappresentare la dipendenza dell'anticipo del rientro Y con il superamento (overflow) di spesa X è:

$$\mathbf{Y(X)= 2^X}$$ Es. di relazione di tipo esponenziale

(Per maggiori dettagli vedere "pegni.xls")

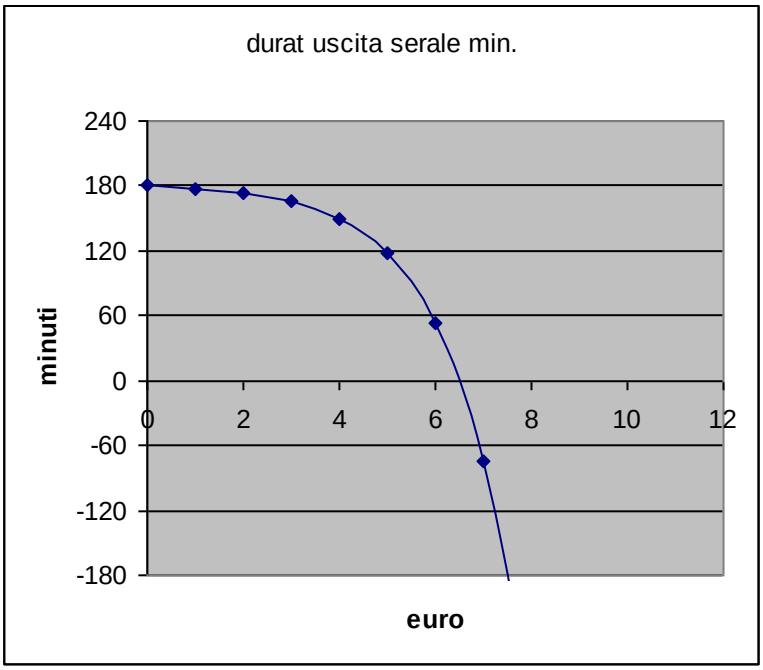
overflow-spesa	Δt anticipo minuti
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048



Maria è molto preoccupata: il grafico ottenuto ha una rapidità di crescita quasi vertiginosa. Maria osserva che la sua uscita viene ridotta già più di un'ora a "soli" 6 euro di sforamento di spesa. Superati i 7 euro può anche rinunciare a uscire.
Impostando ora di uscita e ora di rientro del sabato sera, vuole fare una proiezione della durata di uscita, in caso di overflow di spesa. Ottiene questi risultati

(Per maggiori dettagli vedere "pegni.xls)

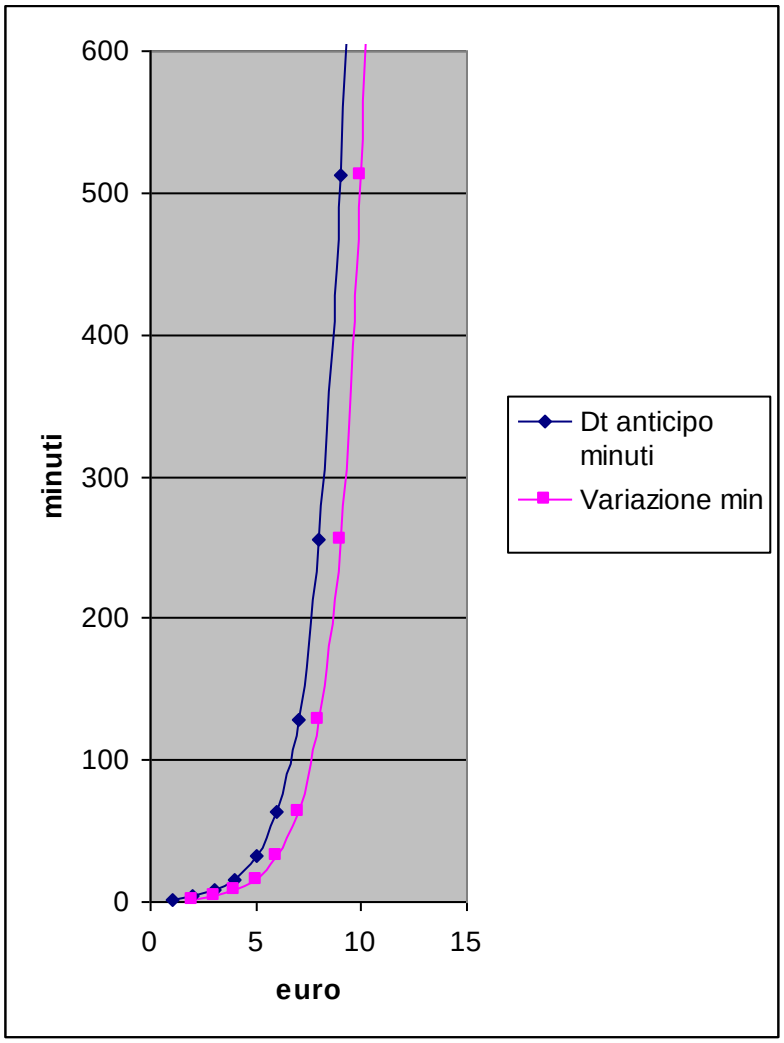
overflow-spesa	durat uscita serale min.
0	180
1	178
2	174
3	166
4	150
5	118
6	54
7	-74
8	-330
9	-842
10	-1866
11	-3914



Maria vuole tornare dai genitori per lamentarsi. Per sostenere le sue argomentazioni decide di costruire anche la tabella e il grafico dell'incremento del pegno per ogni euro in più di spesa oltre quella pattuita.
Ottiene questi dati:

overflow-spesa	Δt anticipo minuti	Variazione min
1	2	
2	4	2
3	8	4
4	16	8
5	32	16
6	64	32
7	128	64

8	256	128
9	512	256
10	1024	512
11	2048	1024



Cosa è possibile evidenziare dalle tabelle e dai grafici?
La classe: …….
È evidente dalla tabella che i valori presenti nelle colonna delle variazioni sono gli stessi di quelli della colonna del Dt_anticipo solo sfalsati di una riga. Si deduce perciò che la funzione variazione ha un andamento del tutto simile a quella di Dt_anticipo.
Attenzione: ricordiamo che stiamo calcolando le variazioni relative a intervalli ben definiti della variabile indipendente. Quindi i valori della variazione corrispondono al coefficiente angolare della retta che congiunge due punti distinti del grafico.

Il tasso di variazione, dipende dall'intervallo rispetto al quale vengono calcolate. (Nota: Si potrebbe parlare di velocità media e istantanea)

Maria torna dai genitori lamentando che i pegni sono troppo pesanti. E fornisce loro i dati che lei ha ottenuti dalla sua indagine
I genitori rispondono a Maria…..
(Scegli tu la conclusione alla storia di Maria tra le seguenti:)

a) **I pegni sono salati ma anche le bollette che abbiamo dovuto pagare negli ultimi mesi!**
b) **In considerazione del fatto che hai saputo utilizzare le tue conoscenze matematiche per analizzare e comprendere meglio il problema, i pegni si applicheranno solo un sabato su due.**
c) **Altro …….**

FINE DELLA STORIA DI
MARIA E LE BOLLETTE TELEFONICHE
…….
……..

APPROFONDIMENTI

variazione di funzioni continue.

Il foglio elettronico Excel permette solo una rappresentazione discreta , quindi discontinua, delle funzioni continue. Quando si rappresenta una funzione continua f(x), la colonna della variabile indipendente x contiene per necessità, una successione discreta e finita dei valori per i quali vogliamo calcolare f(x). Più i valori di x sono ravvicinati più precisa sarà la rappresentazione grafica per punti della funzione. Quando calcoliamo il tasso di variazione della funzione tra un valore di x = x1e il successivo x=x2, in realtà calcoliamo la pendenza della retta che unisce i punti f(x1) e f(x2) e cioè il rapporto :

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Il nostro algoritmo approssimerà tanto meglio la continuità della variabile x, quanto più ravvicinati saranno x1 e x2. Al **limite** , quando x2-x1->0, si può dimostrare che il rapporto di variazione: **rapporto incrementale**, coincide con il coefficiente angolare della retta che passa per x1 e x2 quando x2 si avvicina tanto a x1 da sovrapporsi ad esso.

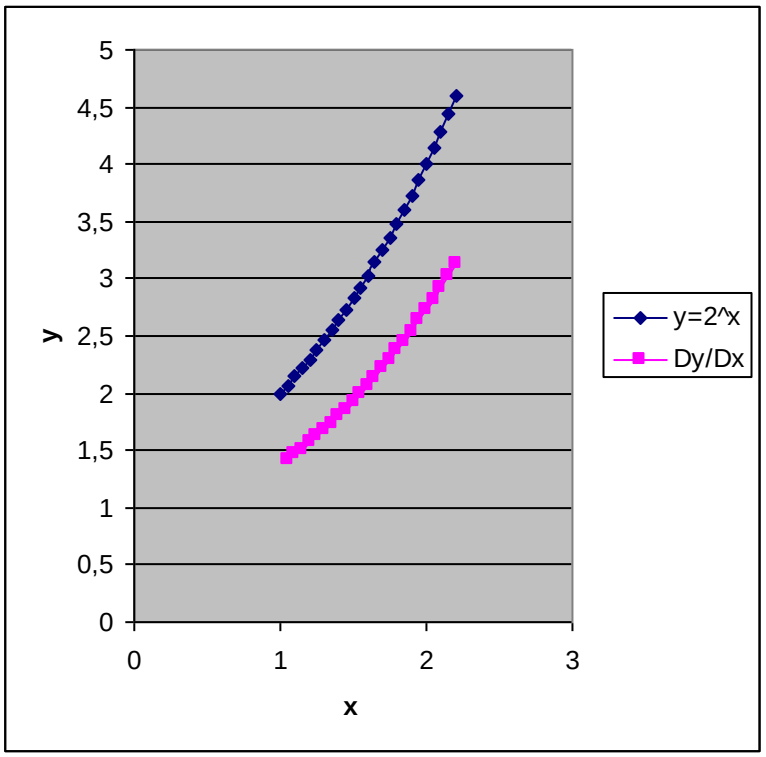
Possiamo convincerci di ciò ricalcolando le tabelle relative alla funzione premio con valori di Δx sempre più piccoli . La costanza della variazione della variazione è tuttora evidente.

Δeuro_risp = 0,1

euro_risp	euro_premio	incr.pre	var incr.
0	0		
0,1	0,00333333	0,033333	
0,2	0,01333333	0,1	0,666667
0,3	0,03	0,166667	0,666667
0,4	0,05333333	0,233333	0,666667
0,5	0,08333333	0,3	0,666667
0,6	0,12	0,366667	0,666667
0,7	0,16333333	0,433333	0,666667
0,8	0,21333333	0,5	0,666667
0,9	0,27	0,566667	0,666667
1	0,33333333	0,633333	0,666667
1,1	0,40333333	0,7	0,666667
1,2	0,48	0,766667	0,666667
1,3	0,56333333	0,833333	0,666667
1,4	0,65333333	0,9	0,666667
1,5	0,75	0,966667	0,666667
1,6	0,85333333	1,033333	0,666667
1,7	0,96333333	1,1	0,666667
1,8	1,08	1,166667	0,666667
1,9	1,20333333	1,233333	0,666667
2	1,33333333	1,3	0,666667
2,1	1,47	1,366667	0,666667
2,2	1,61333333	1,433333	0,666667
2,3	1,76333333	1,5	0,666667
2,4	1,92	1,566667	0,666667
2,5	2,08333333	1,633333	0,666667
2,6	2,25333333	1,7	0,666667
2,7	2,43	1,766667	0,666667
2,8	2,61333333	1,833333	0,666667
2,9	2,80333333	1,9	0,666667
3	3	1,966667	0,666667
3,1	3,20333333	2,033333	0,666667
3,2	3,41333333	2,1	0,666667
3,3	3,63	2,166667	0,666667
3,4	3,85333333	2,233333	0,666667
3,5	4,08333333	2,3	0,666667
3,6	4,32	2,366667	0,666667
3,7	4,56333333	2,433333	0,666667

Se invece ricalcoliamo le tabelle relative alla funzioneY=2^x e al suo tasso di variazione, osserviamo quanto preannunciato rispetto ai casi generali. I valori della funzione tasso di variazione cambiano variando l'ampiezza dell'intervallo Dx. Confrontiamole con i valori delle tabelle presenti in "pegni.xls"

X	y=2^x	Dy/Dx
1	2	
1,05	2,07053	1,410597
1,1	2,143547	1,460342
1,15	2,219139	1,51184
1,2	2,297397	1,565155
1,25	2,378414	1,62035
1,3	2,462289	1,677492
1,35	2,549121	1,736649
1,4	2,639016	1,797891
1,45	2,732081	1,861294
1,5	2,828427	1,926932
1,55	2,928171	1,994885
1,6	3,031433	2,065235
1,65	3,138336	2,138065
1,7	3,24901	2,213464
1,75	3,363586	2,291522
1,8	3,482202	2,372332
1,85	3,605002	2,455992
1,9	3,732132	2,542602
1,95	3,863745	2,632267
2	4	2,725094
2,05	4,14106	2,821194
2,1	4,287094	2,920683
2,15	4,438278	3,023681
2,2	4,594793	3,130311



Vedi "pegni2.xls"
Rendendo Dx sempre più piccolo si vede come variano i dati calcolati nella colonna Dy/Dx. Dal grafico è comunque sempre evidente l'andamento esponenziale della variazione.

Continuiamo questa fase di approfondimento utilizzando un software didattico più adatto a comprendere questi concetti un po' difficili. Il software in questione è TI_Interactive.
In ambiente TI_interactive possiamo tracciare il grafico di funzioni, calcolare ed evidenziare le coppie,x e f(x), per i diversi punti del grafico. Possiamo tracciare rette secanti e rette tangenti ai punti del grafico di una funzione. Nel caso della tangente, può essere evidenziata l'equazione di tale retta. TI_interactive permette di fare zoom successivi che danno la possibilità di convincerci che la retta tangente al grafico approssima l'andamento della funzione in quel punto e che ciò è tanto più vero quanto più piccolo è l'intervallo in cui consideriamo questa approssimazione. Pensiamo allora che il coefficiente angolare della tangente rappresenti il tasso di variazione della funzione proprio quando i due valori x1 e x2 tendono a coincidere. Ti_interacive permette di calcolare il valore del limite del rapporto incrementale: la derivata. Calcolando la derivata negli

stessi punti ove abbiamo tracciato le tangenti del grafico, notiamo che valore della derivata e coefficiente angolare della tangente coincidono.
È possibile anche avvicinarci alla comprensione del significato del teorema fondamentale del calcolo integrale
(Nota vedi applicazioni con TI_interactive:
Bollette
Bollette e calculus
Premi con Ti_interactive
Esponenziale con Ti)

NOTA FINALE

Questo lavoro è stato fatto con una certa passione, e devo dire che mi sono anche divertita. Il tempo a disposizione per elaborarlo in modo preciso invece è stato poco.
Penso pertanto che ogni parte di questo lavoro vada rivista con calma. Non esludo qualche errore. Avendo tempo curerei maggiormente le presentazione didattica e gli esercizi . Per rinforzare i concetti inserirei altri esempi che ritengo necessari per guidare alla generalizzazione
Grazie di avermi letto Daniela Gallotti