

## Relazione di sintesi in base ai vari lavori inviati dagli studenti

### Parte 1

Il tasso alcolemico si misura in grammi di alcool per l di sangue; un tasso alcolemico di un g al l indica quindi che in ogni l di sangue del soggetto è presente un g di alcool puro. Supponiamo che:

- a) una persona abbia assunto una quantità d'alcool tale che dopo la prima mezz'ora il tasso alcolemico raggiunga il valore massimo di 1,5 g al l.
- b) Il fegato di questa persona riesca a smaltire ogni ora il 30% dell'alcool ingerito.
- c) La persona per un'intera settimana non assuma più alcool.

Si chiede di determinare, se possibile, dopo quanto tempo il tasso alcolemico si è ridotto a una quantità pressoché trascurabile(diciamo 0,1 g al l) giustificando la risposta.

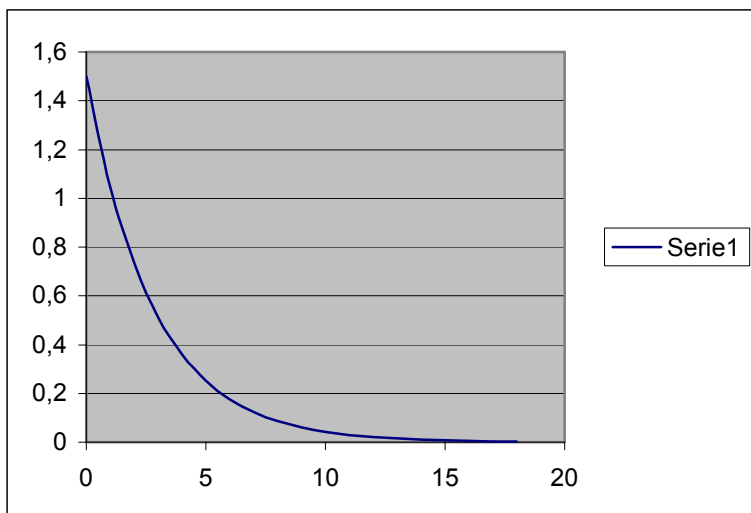
Iniziamo ad affrontare il problema da un punto di vista numerico. Utilizziamo un foglio elettronico e calcoliamo, iterativamente, a partire dalla prima mezz'ora, ossia da 1,5 g/l, il tasso alcolemico rimanente ogni ora (che è il 70% di quello precedente).

	A	B	C	D
1	Osservazione	Tasso alcolemico nel corpo	Differenze prime	Differenze seconde
2	0	1,5	-0,45	0,135
3	1	1,05	-0,315	0,0945
4	2	0,735	-0,2205	0,06615
5	3	0,5145	-0,15435	0,046305
6	4	0,36015	-0,108045	0,0324135
7	5	0,252105	-0,0756315	0,02268945
8	6	0,1764735	-0,05294205	0,015882615
9	7	0,12353145	-0,037059435	0,011117831
10	8	0,086472015	-0,025941605	0,007782481
11	9	0,060530411	-0,018159123	0,005447737
12	10	0,042371287	-0,012711386	0,003813416
13	11	0,029659901	-0,00889797	0,002669391
14	12	0,020761931	-0,006228579	0,001868574
15	13	0,014533352	-0,004360005	0,001308002
16	14	0,010173346	-0,003052004	0,000915601
17	15	0,007121342	-0,002136403	0,000640921
18	16	0,00498494	-0,001495482	0,000448645
19	17	0,003489458	-0,001046837	
20	18	0,00244262		

La tabella riporta nella cella B3 la formula  
 $= 0,7*B1$

Le differenze prime, tutte negative, ci dicono che la successione che rappresenta il tasso alcolemico presente nel corpo è decrescente e le differenze seconde, tutte positive, ci dicono che decresce sempre meno.

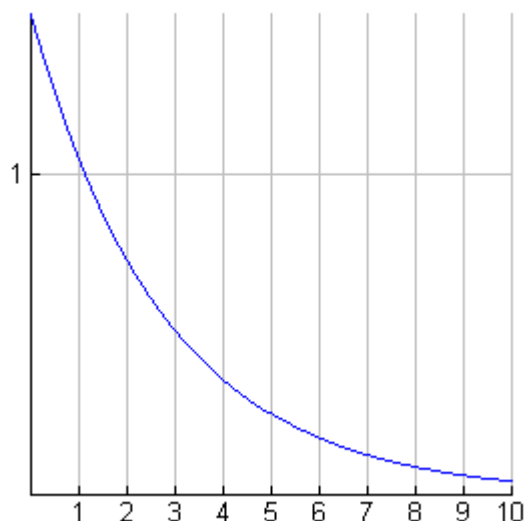
Il grafico, ottenuto con excel, naturalmente conferma quanto ora detto :



Il grafico e le precedenti osservazioni suggeriscono che possa trattarsi di una decrescita esponenziale. L'approccio simbolico conferma questa impressione. Ricordiamo che una successione è di tipo esponenziale se il rapporto tra due termini consecutivi è costante. Ciò è proprio quanto accade in questo caso:  $T(n) = 0.7 * T(n - 1)$  con  $T(0) = 1,5$ . Successione ricorsiva che porta immediatamente alla constatazione che  $\frac{T(n)}{T(n-1)} = 0,7$ . Si tratta quindi di una successione

esponenziale del tipo  $T(n) = 1,5 * 0,7^n$ .

Disegniamo il grafico della funzione  $T(x) = 1,5 * 0,7^x$  con TI-InterActive! e abbiamo:



La formula chiusa ora determinata, che ci dà immediatamente la variazione del tasso al variare di  $n$ , consente di rispondere alla domanda:

dopo quanto tempo il tasso alcolemico si è ridotto a una quantità pressoché trascurabile (diciamo 0,1 g al l)?

Basta impostare risolvere l'equazione:

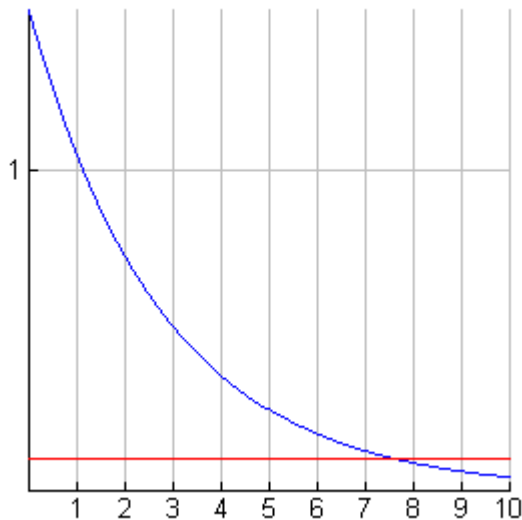
$1,5 * 0,7^n = 0,1$ , ossia  $0,7^n = 1/15$ . L'equazione può essere risolta per tentativi, fino a trovare il più piccolo valore di  $n$  per cui  $0,7^n$  è minore di  $1/15$ , oppure utilizzando il manipolatore simbolico di TI-InterActive! o, ancora, guardando la precedente tabella di Excel che suggerisce che basta prendere  $n = 8$ , ossia dopo 8 ore dall'assunzione dell'alcool.

TI-InterActive! naturalmente conferma tutto ciò:

$$\text{Solve}(1.5 \cdot 0.7^n = 0.1, n)$$

$$n = 7.59249$$

Il seguente grafico fornisce anche un'interpretazione grafica suggestiva della soluzione



## Parte 2

Facciamo l'ipotesi che il tasso alcolemico raggiunga il valore massimo nel sangue in un tempo trascurabile e che una persona assuma costantemente (per esempio due volte al giorno, ad ogni pasto) una quantità di alcool tale da provocare a ogni assunzione un aumento del tasso alcolemico di 0,8g al l.

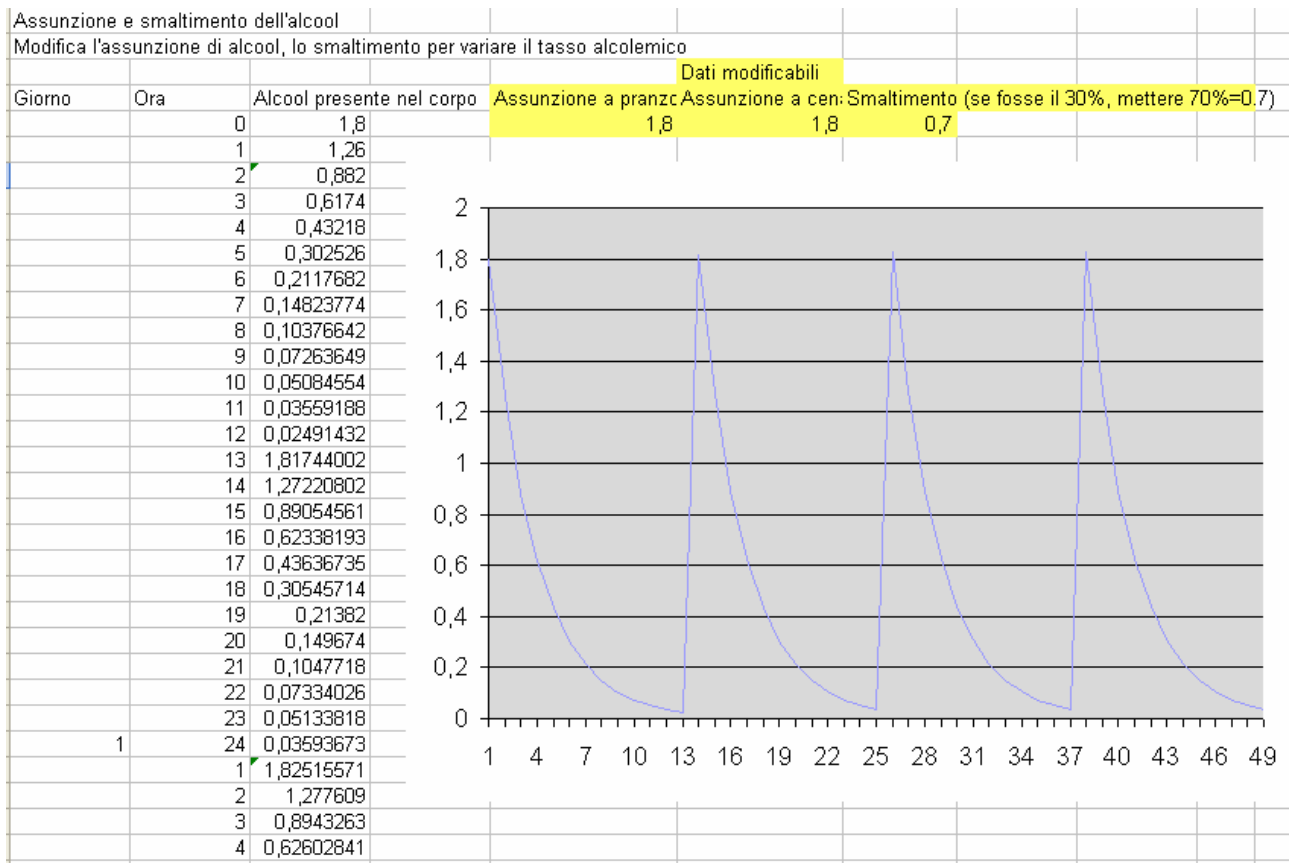
Che cosa si può dire dell'evoluzione a lungo termine della quantità massima di tasso alcolemico nel sangue di questa persona.

Giustificare la risposta.

Per semplicità, consideriamo due assunzioni di alcool al giorno, ogni 12 ore. Per quanto visto prima, ogni 12 ore possiamo supporre che la quantità di alcool presente nel sangue sia pressoché trascurabile. Consideriamo infatti quanta quantità di alcool è rimasta dopo 12 ore nel corpo della persona che ha assunto una quantità di alcool tale da provocare un aumento del tasso alcolemico di 0,8g al l.: basta calcolare  $0,8 \cdot 0,7^{12} \approx 0,01$  g/l.

Poiché si è detto che 0,1 è una quantità pressoché trascurabile, a maggior ragione possiamo trascurare 0,01, che è 1/10 di 0,1. Ciò consente di dire che, se il fegato della persona continuerà a essere in grado di smaltire, ogni ora, il 30% dell'alcol presente nel corpo, la quantità massima di alcool presente nel sangue sarà una costante e cioè 0,8. Durante le 12 ore che separano i pasti, il tasso alcolemico decrescerà esponenzialmente fino a ridursi, poco prima dell'assunzione di altro alcool, praticamente a 0, come suggerisce il seguente grafico:

La seguente immagine riproduce un [foglio di calcolo costruito dal gruppo di Lorenzo](#) che consente di fare esplorazioni su che cosa accade quando varia la quantità di alcool assunta a ogni pasto, oppure quando varia la percentuale di alcool smaltito.

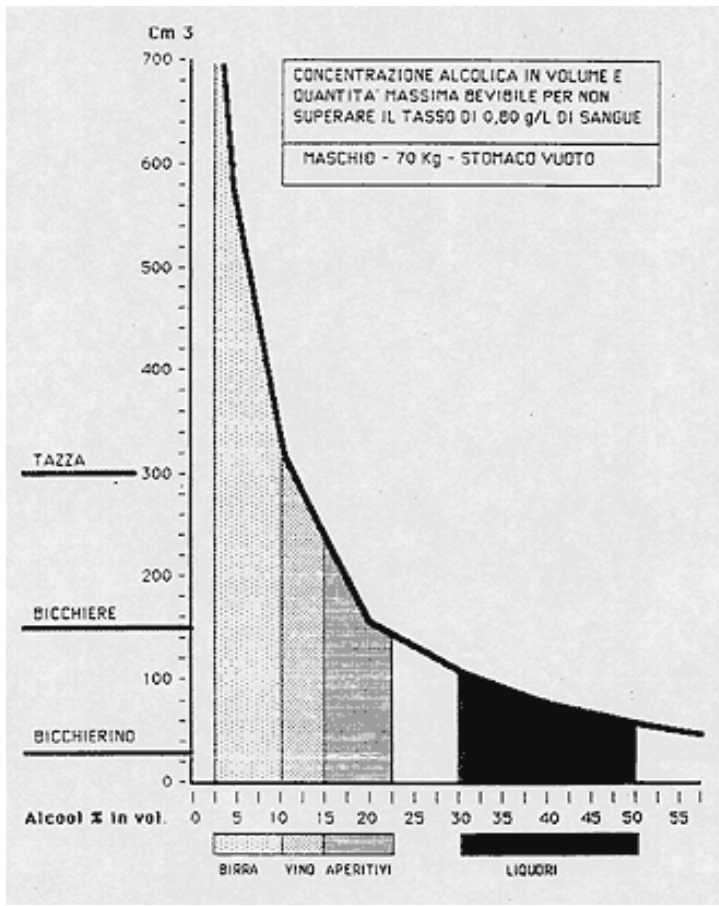


Naturalmente si può anche affrontare il problema da un punto di vista simbolico che consenta poi di vedere che cosa succede al variare dei parametri. È possibile definire una successione per ricorrenza, del tipo:

$$\begin{cases} T(0) = a \\ T(n) = b^c T(n-1) + a \end{cases}$$

Dove  $a$  è la quantità massima di tasso alcolemico presente nel sangue dopo ogni assunzione di alcool;  $b$  è la percentuale di tasso alcolemico smaltita in un'unità di tempo;  $c$  è il numero di unità di tempo.

Il gruppo di Luigi ha prodotto anche il seguente grafico, in cui, sull'asse delle ascisse (x) si trova la gradazione della bevanda e sull'asse delle ordinate (y) è presente il volume in  $\text{cm}^3$ . La spessa linea nera decrescente è la quantità massima in  $\text{cm}^3$  che si può assumere senza superare la soglia dello 0.8 g/l di sangue relativo ad un uomo di 70 kg a stomaco vuoto. Gli spessi strati colorati rappresentano la zona della gradazione tipica della bevanda.



Vediamo ora che cosa succede se, nella relazione  $\begin{cases} T(0) = a \\ T(n) = b^c T(n-1) + a \end{cases}$ , si variano i parametri.

Naturalmente la variazione deve essere realistica, per cui diamo alcuni limiti che riteniamo sensati (e che saranno da verificare in seguito con esperti del settore).

L'assunzione iniziale di alcool  $a$  sia tale da portare il tasso alcolemico (in un tempo trascurabile) a valori compresi tra 0 e 1,5 (poiché siamo interessati a vedere che cosa accade quando le assunzioni sono piuttosto regolari e a intervalli regolari, non consideriamo valori superiori che consisterebbero in vere e proprie sbornie).

Il numero  $c$  di intervalli di tempo che si considerano nello smaltimento tra un'assunzione e l'altra (e che dipende, ovviamente, anche dal numero di assunzioni al giorno che, però, stabiliamo tra due e quattro) sia variabile tra 3 e 12.

La percentuale  $b$  di alcol che rimane dopo ogni periodo di smaltimento sia compresa tra 30 e 90.

Costruiamo ora un [foglio elettronico](#) in cui:

- nella prima colonna, A, sia presente il parametro  $a$  (quantità iniziale di tasso alcolemico dovuta all'assunzione di alcool);
- nella seconda colonna, B, vi sia il parametro  $b$ , ossia la percentuale che rimane dopo ogni periodo di smaltimento (ossia subito prima della prossima assunzione);
- nella terza colonna, C, vi sia il parametro  $c$ , ossia il numero che indica l'esponente del decadimento esponenziale. Per esempio, se  $c = 12$ , vuol dire che stiamo considerando due assunzioni al giorno e lo smaltimento di una percentuale  $1 - b$  ogni ora; se  $c = 6$ , allora o consideriamo uno smaltimento ogni due ore di una percentuale  $1 - b$  con due assunzioni al giorno, oppure stiamo considerando 4 assunzioni al giorno (una ogni 6 ore) con lo smaltimento di una percentuale  $1 - b$  ogni ora;

- d) nella quarta colonna, D, consideriamo la percentuale  $p$  di tasso alcolemico rimasta quando sono trascorsi  $c$  periodi, ossia la percentuale di tasso alcolemico rimasta prima di ogni nuova assunzione;
- e) nella quinta colonna, E, c'è il numero  $n$  della rilevazione del tasso;
- f) nella sesta colonna, F, c'è il tasso alcolemico  $T(n)$  massimo presente a ogni assunzione (quindi il tasso alcolemico subito dopo l'ennesima assunzione);
- g) nella settima colonna, G, c'è il tasso alcolemico  $R(n)$  minimo, ossia quello rimasto prima dell'ennesima assunzione.

Si può immediatamente osservare che con quattro assunzioni al giorno e uno smaltimento poco efficace, anche assumendo una quantità di alcool che potrebbe apparire non preoccupante, il valore di  $R(n)$  si stabilizza immediatamente su 0,2, ossia una quantità di alcool non trascurabile perennemente presente nel sangue (come valore minimo!), che causa inevitabilmente danni al fegato.

$a$	$b$	$c$	$p$	$n$	$T(n)$	$R(n)$
0,8	0,8	6	0,2097152	0	0,8	0,16777216
				1	0,967772	0,20295653
				2	1,002957	0,21033523
				3	1,010335	0,21188265
				4	1,011883	0,21220717
				5	1,012207	0,21227523
				6	1,012275	0,2122895
				7	1,01229	0,2122925
				8	1,012292	0,21229312
				9	1,012293	0,21229325
				10	1,012293	0,21229328
				11	1,012293	0,21229329
				12	1,012293	0,21229329
				13	1,012293	0,21229329
				14	1,012293	0,21229329
				15	1,012293	0,21229329
				16	1,012293	0,21229329
				17	1,012293	0,21229329
				18	1,012293	0,21229329
				19	1,012293	0,21229329
				20	1,012293	0,21229329
				21	1,012293	0,21229329
				22	1,012293	0,21229329
				23	1,012293	0,21229329
				24	1,012293	0,21229329
				25	1,012293	0,21229329
				26	1,012293	0,21229329
				27	1,012293	0,21229329
				28	1,012293	0,21229329
				29	1,012293	0,21229329
				30	1,012293	0,21229329

Invece se le assunzioni avvengono ogni 12 ore e lo smaltimento è efficace (almeno del 25% ogni ora), allora anche in presenza di assunzioni piuttosto pesanti, il tasso alcolemico minimo presente nel sangue non raggiunge mai 0,1 g/l:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>p</i>	<i>n</i>	<i>T(n)</i>	<i>R(n)</i>
1,5	0,75	12	0,047514528	0	1,5	0,07127179
				1	1,571272	0,07465824
				2	1,574658	0,07481914
				3	1,574819	0,07482679
				4	1,574827	0,07482715
				5	1,574827	0,07482717
				6	1,574827	0,07482717
				7	1,574827	0,07482717
				8	1,574827	0,07482717
				9	1,574827	0,07482717
				10	1,574827	0,07482717
				11	1,574827	0,07482717
				12	1,574827	0,07482717
				13	1,574827	0,07482717
				14	1,574827	0,07482717
				15	1,574827	0,07482717
				16	1,574827	0,07482717
				17	1,574827	0,07482717
				18	1,574827	0,07482717
				19	1,574827	0,07482717
				20	1,574827	0,07482717
				21	1,574827	0,07482717
				22	1,574827	0,07482717
				23	1,574827	0,07482717